

## REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA EM NOTAÇÃO DE AMPLITUDES COMPLEXAS

Designando por  $j$  a unidade imaginária, o número complexo  $a + jb$  pode ser escrito em notação de Euler como  $U_0 e^{j\theta}$ , em que  $U_0$  designa o módulo do complexo e  $\theta$  o seu argumento. Em geral, ao argumento corresponde a fase  $\theta = \omega t + \phi$ , em que  $\omega$  é a frequência angular igual a  $\frac{2\pi}{T}$  e  $\phi$  a fase na origem dos tempos.  $T$  é o período da oscilação de frequência  $f$ , sendo dado por  $\frac{1}{f}$ .

Pode estabelecer-se uma correspondência biunívoca entre as funções que representam grandezas alternadas sinusoidais e os elementos do conjunto dos números complexos, por forma a que à função  $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$  corresponda o complexo  $\bar{U} = U_0 e^{j\phi}$ . Assim sendo, a função real  $u$  será igual à parte real do complexo  $\bar{U}$  multiplicado pelo termo correspondente à frequência angular  $e^{j\omega t}$ , isto é:

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re}\{(\bar{U})e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{(U_0 e^{j\phi})e^{j\omega t}\} = U_0 \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \phi)}\} = U_0 \operatorname{Re}\{\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)\} = \\ &= U_0 \cos(\omega t + \phi). \end{aligned}$$

O complexo  $\bar{U}$  passa a designar-se por *amplitude complexa da grandeza (real) instantânea*  $u(t)$ .

Ao substituímos as funções sinusoidais pelas suas respectivas amplitudes complexas torna-se possível passar certos cálculos envolvendo operadores diferenciais a simples manipulações algébricas, simplificando-se grandemente o processo de cálculo. Vejamos:

### Soma (ou diferença) de duas funções:

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega t + \phi_1) \Leftrightarrow u_1(t) = \operatorname{Re}\{(U_1 e^{j\phi_1})e^{j\omega t}\} \Rightarrow \bar{U}_1 = U_1 e^{j\phi_1}$$

$$u_2(t) = U_2 \cos(\omega t + \phi_2) \Leftrightarrow u_2(t) = \operatorname{Re}\{(U_2 e^{j\phi_2})e^{j\omega t}\} \Rightarrow \bar{U}_2 = U_2 e^{j\phi_2}$$

$$u_1(t) + u_2(t) = \operatorname{Re}\{(\bar{U}_1)e^{j\omega t}\} + \operatorname{Re}\{(\bar{U}_2)e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{(\bar{U}_1 + \bar{U}_2)e^{j\omega t}\}$$

### Produto (ou cociente) de duas amplitudes complexas:

$$u_3(t) = \operatorname{Re}\{(\bar{U}_1 \cdot \bar{U}_2)e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{U_1 e^{j\phi_1} U_2 e^{j\phi_2} e^{j\omega t}\} = U_1 U_2 \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \phi_1 + \phi_2)}\} = U_1 U_2 \cos(\omega t + \phi_1 + \phi_2)$$

**Derivação em ordem ao tempo:**

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} U_0 \cos(\omega t + \phi) = -\omega U_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} (\text{Re} \{ \bar{U} e^{j\omega t} \}) = \text{Re} \left\{ \bar{U} \frac{d}{dt} e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \{ j\omega (\bar{U}) e^{j\omega t} \} = \text{Re} \{ j\omega (U_0 e^{j\phi}) e^{j\omega t} \} =$$

$$= \omega U_0 \text{Re} \left\{ e^{j(\frac{\pi}{2} + \phi + \omega t)} \right\} = \omega U_0 \cos \left( \frac{\pi}{2} + \phi + \omega t \right) = -\omega U_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Repare-se que derivar uma amplitude complexa em ordem ao tempo é simplesmente multiplicá-la pelo factor  $j\omega$ , ou seja:

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = j\omega \bar{U}$$

**Primitivação:**

$$\int u(t) dt = \int \text{Re} \{ \bar{U} e^{j\omega t} \} dt = \text{Re} \left\{ \bar{U} \int e^{j\omega t} dt \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{\bar{U}}{j\omega} e^{j\omega t} \right\} = \frac{U_0}{\omega} \text{Re} \left\{ e^{j\phi} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} \right\} =$$

$$= \frac{U_0}{\omega} \text{Re} \left\{ e^{j(-\frac{\pi}{2} + \phi + \omega t)} \right\} = \frac{U_0}{\omega} \cos \left( -\frac{\pi}{2} + \phi + \omega t \right) = \frac{U_0}{\omega} \sin(\omega t + \phi)$$

Repare-se que primitivar uma amplitude complexa corresponde a multiplicá-la pelo factor  $\frac{1}{j\omega}$ , ou seja:

$$\int \bar{U} dt = \frac{\bar{U}}{j\omega}$$

**Derivação em ordem ao espaço, operadores Gradiente, Divergência e Rotacional:**

Toma-se agora uma base ortonormada do espaço  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , e considere-se uma função  $\bar{U}$ , complexa e de variável complexa, harmónica no tempo e com dependência espacial:

$$\bar{U}(\vec{r}, t) = U_0 e^{j(\omega t - \bar{k} \cdot \vec{r})},$$

em que  $\vec{r}$  é o vector posição dado nas habituais coordenadas cartesianas.  $\bar{k}$  é uma constante no espaço;

$$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z.$$

Se derivarmos esta função em ordem ao tempo, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{U}(\vec{r}, t) = j\omega \bar{U}(\vec{r}, t)$$

Derivando em ordem às coordenadas espaciais, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{U}(\vec{r}, t) = -j\bar{k}_x \bar{U}(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \bar{U}(\vec{r}, t) = -j\bar{k}_y \bar{U}(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{U}(\vec{r}, t) = -j\bar{k}_z \bar{U}(\vec{r}, t)$$

Verifica-se que derivar a função em ordem a cada uma das suas coordenadas espaciais corresponde a multiplicar a função por  $-j\bar{k}_i$ , em que  $i$  representa a  $i$ -ésima coordenada.

Posto isto, é fácil verificar que o operador gradiente vem dado por:

$$\mathit{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\mathit{grad} \bar{U} = \nabla \bar{U} = -j(k_x + k_y + k_z) \bar{U}$$

De forma análoga se podem obter as expressões para a divergência e para o rotacional, obtendo-se:

Divergência:  $\mathit{div} \bar{U} = \nabla \cdot \bar{U} = -j(\vec{k} \cdot \bar{U})$

Rotacional:  $\mathit{rot} \bar{U} = \nabla \times \bar{U} = -j(\vec{k} \times \bar{U})$

**Paulo Fontoura, Fevereiro de 2011**