REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA EM NOTAÇÃO DE AMPLITUDES COMPLEXAS

Designando por j a unidade imaginária, o número complexo *a + jb* pode ser escrito em notação de Euler como $U_0 e^{j\theta}$, em que U_0 designa o módulo do complexo e θ o seu argumento. Em geral, ao argumento corresponde a fase θ = $\omega t + \phi$, em que ω é a frequência angular igual a $\frac{2\pi}{T}$ e ϕ a fase na origem dos tempos. *T* é o período da oscilação de frequência *f,* sendo dado por $\frac{1}{f}$.

Pode estabelecer-se uma correspondência biunívoca entre as funções que representam grandezas alternadas sinusoidais e os elementos do conjunto dos números complexos, por forma a que à função $u(t) = U_0 \cos\,(\omega t\ +$ ϕ corresponda o complexo *U= U0ejϕ.* Assim sendo, a função real u será igual à parte real do complexo U multiplicado pelo termo correspondente à frequência angular $e^{j\omega}$, isto é:

$$u(t) = Re\left\{(\overline{U})e^{j\omega t}\right\} = \ Re\left\{\left(U_0 e^{j\phi}\right)e^{j\omega t}\right\} = U_0\ Re\left\{e^{j(\omega t+\ \phi)}\right\} = \ U_0\ Re\left\{\cos(\omega t\ +\ \phi) +\ j\sin(\omega t\ +\ \phi)\ \right\} =$$

$$= \ U_0\cos\ (\omega t\ +\ \phi).$$

O complexo $\overline{U}$ passa a designar-se por *amplitude complexa da grandeza (real) instantânea* $u(t)$.

Ao substituirmos as funções sinusoidais pelas suas respectivas amplitudes complexas torna-se possível passar certos cálculos envolvendo operadores diferencias a simples manipulações algébricas, simplificando-se grandemente o processo de cálculo. Vejamos:

Soma (ou diferença) de duas funções:

$$u_1(t) = \ U_1\cos(\omega t\ +\ \phi_1) \quad \Leftrightarrow \quad u_1(t) = Re\left\{\left(U_1 e^{j\phi_1}\right)e^{j\omega t}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overline{U_1} = \ U_1 e^{j\phi_1}$$

$$u_2(t) = \ U_2\cos(\omega t\ +\ \phi_2) \quad \Leftrightarrow \quad u_2(t) = Re\left\{\left(U_2 e^{j\phi_2}\right)e^{j\omega t}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overline{U_2} = \ U_2 e^{j\phi_2}$$

$$u_1(t) +\ u_2(t) = \ Re\left\{(\overline{U_1})e^{j\omega t}\right\} +\ Re\left\{(\overline{U_2})e^{j\omega t}\right\}\ =\ Re\left\{(\overline{U_1} + \overline{U_2}\ )e^{j\omega t}\right\}$$

Produto (ou cociente) de duas amplitudes complexas:

$$u_3(t)\ =\ \ Re\left\{(\overline{U_1}\,.\overline{U_2})e^{j\omega t}\right\} = \ Re\left\{U_1 e^{j\phi_1} U_2 e^{j\phi_2} e^{j\omega t}\right\} = U_1 U_2 Re\left\{e^{j(\omega t+\phi_1+\phi_2)}\right\} = \ U_1 U_2\cos(\omega t\ +\ \phi_1 +\ \phi_2)$$

Derivação em ordem ao tempo:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\, U_0 \cos(\omega t + \phi) = -\,\omega U_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Re\left\{\bar{U}\, e^{j\omega t}\right\}\right) = Re\left\{\bar{U}\,\frac{d}{dt}\, e^{j\omega t}\right\} = Re\left\{j\omega(\bar{U})e^{j\omega t}\right\} = Re\left\{j\omega\left(U_0 e^{j\phi}\right)e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \omega U_0 Re\left\{e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\,\phi+\,\omega t\right)}\boldsymbol{e^{j\phi}}\right\} = \omega U_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi + \omega t\right) = -\omega U_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Repare-se que derivar uma amplitude complexa em ordem ao tempo é simplesmente multiplicá-la pelo factor $j\omega$, ou seja:

$$\boldsymbol{\frac{d\bar{U}}{dt} = j\omega\bar{U}}$$

Primitivação:

$$\int u(t)dt = \int Re\left\{\bar{U}e^{j\omega t}\right\}dt = Re\left\{\bar{U}\int e^{j\omega t}\, dt\right\} = Re\left\{\frac{\bar{U}}{j\omega}\, e^{j\omega t}\right\} = \frac{U_0}{\omega} Re\left\{e^{j\phi}e^{-j\frac{\pi}{2}}\, e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \frac{U_0}{\omega} Re\left\{e^{j\left(-\frac{\pi}{2}+\,\phi+\,\omega t\right)}\right\} = \frac{U_0}{\omega}\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \phi + \omega t\right) = \frac{U_0}{\omega}\sin(\omega t + \phi)$$

Repare-se que primitivar uma amplitude complexa corresponde a multiplicá-la pelo factor $\frac{1}{j\omega}$, ou seja:

$$\boldsymbol{\int \bar{U} dt = \frac{\bar{U}}{j\omega}}$$

Derivação em ordem ao espaço, operadores Gradiente, Divergência e Rotacional:

Toma-se agora uma base ortonormada do espaço $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, e considere-se uma função $\overline{U}$, complexa e de variável complexa, harmónica no tempo e com dependência espacial:

$$\overline{U}(\vec{r},t) = U_0 e^{j(\omega t - \overline{k}.\vec{r})},$$

em que $\vec{r}$ é o vector posição dado nas habituais coordenadas cartesianas. $\overline{k}$ é uma constante no espaço;

$$\vec{k} = k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z.$$

Se derivarmos esta função em ordem ao tempo, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{U}(\vec{r},t) = j\omega\overline{U}(\vec{r},t)$$

Derivando em ordem às coordenadas espaciais, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{U}(\vec{r},t) = -j\overline{k_x}\,\overline{U}(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\overline{U}(\vec{r},t) = -j\overline{k_y}\,\overline{U}(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\overline{U}(\vec{r},t) = -j\overline{k_z}\,\overline{U}(\vec{r},t)$$

Verifica-se que derivar a função em ordem a cada uma das suas coordenadas espaciais corresponde a multiplicar a função por $-j\overline{k_\iota}$, em que *i* representa a i-ésima coordenada.

Posto isto, é fácil verificar que o operador gradiente vem dado por:

$grad = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$

$$\boldsymbol{grad\overline{U}} = \boldsymbol{\nabla\overline{U}} = -\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k_x} + \boldsymbol{k_y} + \boldsymbol{k_z})\,\boldsymbol{\overline{U}}$$

De forma análoga se podem obter as expressões para a divergência e para o rotacional, obtendo-se:

Divergência: $\boldsymbol{div\ \overline{U}} = \boldsymbol{\nabla \bullet \overline{U}} = -\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\vec{k} \bullet \overline{U}})$

Rotacional: $\boldsymbol{rot\ \overline{U}} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\overline{U}} = -\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\vec{k}} \times \boldsymbol{\overline{U}})$

Paulo Fontoura, Fevereiro de 2011