Exercícios de Revisão

Primitivas Por Partes

§1 Introdução Teórica

Regra da "uvelhinha":

$$Puv' = uv - Pu'v$$

ou equivalentemente:

$$P(fg) = fG - P(f'G) = gF - P(g'F) = P(gf) \text{ em que } G \equiv Pg$$

Neste texto usaremos sempre na primeira forma, os resultados são obviamente os mesmos, no entanto a primeira forma tem mostrado ser estatisticamente mais "fácil de fixar" por parte dos alunos. No entanto cada aluno deve sempre usar a forma que é explicada na sua disciplina.

§2 Exercícios Resolvidos

§2.1 Polinómio/Exponencial

Neste caso sabemos primitivar/derivar quer o polinómio, quer a exponencial. Devemos observar que a exponencial após se primitivar/derivar, fica na "mesma". Ao passo que o polinómio não. Devemos escolher o polinómio como função a derivar, uma vez que "diminui um grau" por cada derivação "que sofre".

2.1.1 Calcule uma primitiva das seguintes funções:

(a) $(x+3)e^{x/2}$

(b) $(2x^2+1)e^{3x}$

(c) $x^3 e^x$

(d) $x^7 e^{x^4}$

Resolução:

(a) $P\,(x-3)e^{x/2}$ seja: $u = x+3$; $u' = 1$

$v' = e^{x/2}$; $v = 2\,e^{x/2}$

então:

$$P\,(x-3)e^{x/2} = 2(x-3)e^{x/2} - 2\,P\,e^{x/2} = 2(x-3)e^{x/2} - 4\,P\frac{1}{2}\,e^{x/2} = 2(x-3)e^{x/2} - 4e^{x/2}$$

(b) $P(2x^2+1)e^{3x}$ seja: $u = 2x^2+1$; $u' = 4x$

$v' = e^{3x}$; $v = \frac{1}{3}e^{3x}$

então:

$$P(2x^2+1)e^{3x} = \frac{2x^2+1}{3}e^{3x} - \frac{4}{3}P\,x\,e^{3x}$$

seja agora: $u = x \quad ; \quad u' = 1$

$v' = e^{3x} \quad ; \quad v = \frac{1}{3}e^{3x}$

então:

$$P(2x^2+1)e^{3x} = \frac{2x^2+1}{3}e^{3x} - \frac{4}{3}\left[\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}P\,e^{3x}\right] = \frac{2x^2+1}{3}e^{3x} - \frac{4}{9}x\,e^{3x} + \frac{4}{27}e^{3x}$$

(c) $P\ x^3 e^x$ seja: $u = x^3 \quad ; \quad u' = 3x^2$

$v' = e^x \quad ; \quad v = e^x$

então:

$P\ x^3 e^x = x^3 e^x - 3P\,x^2 e^x$ de novo se: $u = x^2 \quad ; \quad u' = 2x$

$v' = e^x \quad ; \quad v = e^x$

fica: $P\ x^3 e^x = x^3 e^x - 3\left[x^2 e^x - 2\,P\,x\,e^x\right] = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\,P\,x\,e^x$

e se: $u = x \quad ; \quad u' = 1$

$v' = e^x \quad ; \quad v = e^x$

obtém-se finalmente: $P\ x^3 e^x = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left[x\,e^x - P\,e^x\right] = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x\,e^x - 6e^x$

(d) $P\ (x^7 e^{x^4}) = \frac{1}{4}P\ (\ x^4\ 4\,x^3\ e^{x^4})$ seja: $u = x^4 \quad ; \quad u' = 4x^3$

$v' = 4x^3 e^{x^4}; \quad v = e^{x^4}$

$$P\ (x^7 e^{x^4}) = \frac{1}{4}P\ (\ x^4\ 4\,x^3\ e^{x^4}) = \frac{1}{4}(x^4 e^{x^4} - P\,4x^3 e^{x^4}) = \frac{1}{4}(x^4 e^{x^4} - e^{x^4}) = \frac{x^4-1}{4}e^{x^4}$$

§2.2 Polinómio/(Sin ou Cos)

Neste caso sabemos primitivar/derivar quer o polinómio, quer o sen/cos. Devemos observar que o sen/cos após se primitivar/derivar, fica na “mesma”. Ao passo que o polinómio não. Devemos escolher o polinómio como função a derivar, uma vez que “diminui um grau” por cada derivação “que sofre”.

2.2.1 Calcule uma primitiva das seguintes funções:

(a) $(2x-1)\sin 2x$

(b) $\frac{x+2}{3}\cos 5x$

Resolução:

(a) $P\ (2x-1)\sin 2x$ seja: $u = 2x-1 \quad ; \quad u' = 2$

$v' = \sin 2x \quad ; \quad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$$P\ (2x-1)\sin 2x = -\frac{2x-1}{2}\cos 2x + P\ \cos 2x = -\frac{2x-1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

(b) $P\ \frac{x+2}{3}\cos 5x$ seja: $u = \frac{x+2}{3} \quad ; \quad u' = \frac{1}{3}$

$v' = \cos 5x \quad ; \quad v = \frac{1}{5}\sin 5x$

$$P\ \frac{x+2}{3}\cos 5x = \frac{x+2}{15}\sin 5x - \frac{1}{15}\ P\ \sin 5x = \frac{x+2}{15}\sin 5x + \frac{1}{75}\cos 5x$$

§2.3 (Exponencial ou Sin ou Cos)/ (Sin ou Cos)

Neste caso sabemos primitivar/derivar quer a exponencial, quer o sen/cos. Devemos observar que o sen/cos após se primitivar/derivar, fica na “mesma”. Tal como a exponecial. A escolha é arbitrária e a primitiva é “recurvisa”. No entanto a segunda escolha deve ser igual escolher o polinómio como função a derivar, uma vez que “diminui um grau” por cada derivação “que sofre”.

2.3.1 Calcule uma primitiva das seguintes funções:

(a) $e^{2x}\sin 3x$

(b) $\sin 2x\ \cos 3x$

Resolução:

(a) $P\ e^{2x}\sin 3x$ seja: $u = e^{2x}$; $u' = 2\ e^{2x}$

$v' = \sin 3x$; $v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x$

$$P\ e^{2x}\sin 3x = -\frac{1}{3}e^{2x}\ \cos 3x + \frac{2}{3}\ P\ e^{2x}\cos 3x$$

seja: $u = e^{2x}$; $u' = 2\ e^{2x}$

$v' = \cos 3x$; $v = \dfrac{1}{3}\sin 3x$

$$P\ e^{2x}\sin 3x = -\frac{1}{3}e^{2x}\ \cos 3x + \frac{2}{3}\left[\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}P\ e^{2x}\sin 3x\right]$$

$$P\ e^{2x}\sin 3x = -\frac{1}{3}e^{2x}\ \cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\ \sin 3x - \frac{4}{9}P\ e^{2x}\sin 3x$$

portanto:

$$P\ e^{2x}\sin 3x + \frac{4}{9}P\ e^{2x}\sin 3x = -\frac{1}{3}e^{2x}\ \cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\ \sin 3x$$

$$\frac{13}{9}P\ e^{2x}\sin 3x = -\frac{1}{3}e^{2x}\ \cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\ \sin 3x$$

$$P\ e^{2x}\sin 3x = \frac{9}{13}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\ \cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\ \sin 3x\right) = -\frac{3}{13}e^{2x}\ \cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x}\ \sin 3x$$

(b) $P\sin 2x\cos 3x$ seja: $u = \sin 2x$; $u' = 2\cos 2x$

$v' = \cos 3x$; $v = \dfrac{1}{3}\sin 3x$

$$P\sin 2x\cos 3x = \frac{1}{3}\sin 2x\sin 3x - \frac{2}{3}\ P\ \cos 2x\sin 3x$$

seja: $u = \cos 2x$; $u' = -2\sin 2x$

$v' = \sin 3x$; $v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x$

$$P\sin 2x\cos 3x = \frac{1}{3}\sin 2x\sin 3x - \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}\cos 2x\cos 3x - \frac{2}{3}\sin 2x\cos 3x\right]$$

$$= \frac{1}{3}\sin 2x\sin 3x\ 6 + \frac{2}{9}\cos 2x\cos 3x + \frac{4}{9}\sin 2x\cos 3x$$

ou seja:

$$\frac{5}{9}P\sin 2x\cos 3x = \frac{1}{3}\sin 2x\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 2x\cos 3x$$

$$P\sin 2x\cos 3x = \frac{9}{5}\left(\frac{1}{3}\sin 2x\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 2x\cos 3x\right)$$

$$P\sin 2x\cos 3x = \frac{9}{15}\sin 2x\sin 3x + \frac{2}{5}\cos 2x\cos 3x = \frac{3}{5}\sin 2x\sin 3x + \frac{2}{5}\cos 2x\cos 3x$$

§2.4 Logaritmo

Neste caso temos apenas “uma função” em que a função e primitivar é a unidade, i.e. $v' = 1$, pois a derivada de uma constante é nula.

2.4.1 Calcule uma primitiva das seguintes funções:
(a) $\log x$
(b) $\log^2 x$

Resolução:

(a) $P[\log x]$ seja: $u = \log x$; $u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1$; $v = x$

$$P[\log x] = x\log x - P\left[x\frac{1}{x}\right] = x\log x - P[1] = x(\log x - 1)$$

(b) $P[\log^2 x]$ seja: $u = \log^2 x$; $u' = 2\frac{1}{x}\log x$

$v' = 1$; $v = x$

$$P\log^2 x = x\log^2 x - 2P\log x$$

seja: $u = \log x$; $u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1$; $v = x$

$$P\log^2 x = x\log^2 x - 2\left[x\log x - P1\right] = x\log^2 x - 2x\log x + 2x$$

§2.5 Trigonométricas

2.5.1 Calcule uma primitiva das seguintes funções:
(a) $tg^2 x \sec x$

Resolução:

(a) $P\ tg^2 x \sec x = P\ \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sec x = P\ \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sec x = P\ \frac{\sec x}{\cos^2 x} - P\sec x = P\ \sec^3 x - P\sec x$

A segunda primitiva é imediata $P\sec x = \log\left|\sec x + tg\, x\right|$, a primeira primitiva-se por partes:

$$u = \sec x \quad ; \quad u' = tg\, x \sec x$$
$$v' = \sec^2 x \quad ; \quad v = tg\, x$$

$$P\ tg^2 x \sec x = \sec x\, tg\, x - P\ tg^2 x \sec x - \log\left|\sec x + tg\, x\right| = \sec x\, tg\, x - P\ tg^2 x \sec x - \log\left|\sec x + tg\, x\right|$$

$$2P\ tg^2 x \sec x = \sec x\, tg\, x - \log\left|\sec x + tg\, x\right|$$

$$P\ tg^2 x \sec x = \frac{1}{2}\sec x\, tg\, x - \frac{1}{2}\log\left|\sec x + tg\, x\right|$$

§2.6 Trigonométricas Inversas

2.6.1 Calcule uma primitiva das seguintes funções:
(a) $arctg\, 3x$
(b) $\arcsin \frac{x}{3}$

Resolução:

(a) $P\ arctg\, 3x$ seja: $u = arctg\, 3x \quad ; \quad u' = \frac{3}{1+9x^2}$

$v' = 1 \quad ; \quad v = x$

$$P\ arctg\, 3x = x\ arctg\, 3x - P\ \frac{3x}{1+(3x)^2} = x\, arctg\, 3x - \frac{1}{6}\ P\ \frac{18x}{1+9x^2} = x\, arctg\, 3x - \frac{1}{6}\log\left|1+9x^2\right|$$

(b) $P \arcsin\frac{x}{3}$ seja: $u = \arcsin\frac{x}{3}$; $u' = \frac{1/3}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}$

$v' = 1$; $v = x$

$$P \arcsin\frac{x}{3} = x \arcsin\frac{x}{3} - P \frac{x/3}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} = x \arcsin\frac{x}{3} - P \frac{x}{3}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{-1/2} = x \arcsin\frac{x}{3} + \frac{3}{2} P \frac{2x}{9}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{-1/2}$$

$$= x \arcsin\frac{x}{3} + \frac{3}{2}\,\frac{\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{1/2}}{1/2} = x \arcsin\frac{x}{3} + 3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$$

§2.7 Outras situações

2.7.1 Calcule uma primitiva das seguintes funções:

(a) $\sqrt{1-x^2}$

Resolução:

(a) $P\sqrt{1-x^2} = P\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = P\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - P\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - P\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

seja: $u = x$; $u' = 1$

$v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-1/2}$; $v = -\sqrt{1-x^2}$

$$P\sqrt{1-x^2} = \arcsin x - \left[-x(1-x^2)^{1/2} + P\sqrt{1-x^2}\right]$$
$$= \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - P\sqrt{1-x^2}$$

portanto:

$$2P\sqrt{1-x^2} = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}$$

$$P\sqrt{1-x^2} = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

§3 Exercícios Propostos

(a) $\dfrac{x^2 - 2x + 5}{e^x}$

(b) $x \sin x \cos x$

(c) $\dfrac{\log x}{x^3}$

(d) $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$

(e) $\log(x + \sqrt{1 + x^2})$

(f) $\dfrac{x}{\sin^2 x}$

(g) $\sin(\log x)$

(h) $\dfrac{\log^2 x}{x^2}$

(i) $\arcsin^2 x$

§4 Soluções/Sugestões dos exercícios propostos

(a) $P\,\dfrac{x^2-2x+5}{e^x} = P\,(x^2-2x+5)\,e^{-x}$

Seja: $u = x^2-2x+5$; $u' = 2x-2$

$v' = e^{-x}$; $v = -e^{-x}$

$$P\,\frac{x^2-2x+5}{e^x} = -(x^2-2x+5)e^{-x} + P\,(2x-2)\,e^{-x}$$

Seja: $u = 2x-2$; $u' = 2$

$v' = e^{-x}$; $v = -e^{-x}$

$$P\,\frac{x^2-2x+5}{e^x} = -\frac{x^2-2x+5}{e^x} + \frac{2-2x}{e^x} + 2\,P\,e^{-x} = -\frac{x^2-2x+5}{e^x} + \frac{2-2x}{e^x} - \frac{2}{e^x} = -\frac{x^2+5}{e^x}$$

(b) $P\,x\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\,P\,x\sin 2x$

Seja: $u = x$; $u' = 1$

$v' = \sin 2x$; $v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$

$$P\,x\sin x\,\cos x = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}P\cos 2x\right] = -\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\sin 2x = -\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x$$

(c) $P\,\dfrac{\log x}{x^3} = P\,x^{-3}\,\log x$

Seja: $u = \log x$; $u' = \dfrac{1}{x}$

$v' = x^{-3}$; $v = -\dfrac{1}{2x^2}$

$$P\,\frac{\log x}{x^3} = -\frac{\log x}{2x^2} + \frac{1}{2}\,P\,x^{-3} = -\frac{\log x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$$

(d) $P\,\dfrac{\log x}{\sqrt{x}} = P\,x^{-1/2}\,\log x$

Seja: $u = \log x$; $u' = \dfrac{1}{x}$

$v' = x^{-1/2}$; $v = -2\sqrt{x}$

$$P\,\frac{\log x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\log x - 2P\frac{\sqrt{x}}{x} = 2\sqrt{x}\log x - 2P\,x^{-1/2} = 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x}$$

(e)	$P\log(x+\sqrt{1+x^2})$

Seja: $u = \log(x+\sqrt{1+x^2})$; $u' = \dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$v' = 1$; $v = x$

$$P\log(x+\sqrt{1+x^2}) = x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - P\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}P\,2x(1+x^2)^{-1/2}$$

$$= x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{1/2}}{1/2} = x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$$

(f)	$P\,\dfrac{x}{\sin^2 x} = P\,x\,\mathrm{cosec}^2 x$

Seja: $u = x$; $u' = 1$

$v' = \mathrm{cosec}^2 x$; $v = -\mathrm{cotg}\,x$

$$P\,\frac{x}{\sin^2 x} = -x\,\mathrm{cotg}\,x + P\,\mathrm{cotg}\,x = -x\,\mathrm{cotg}\,x + \log|\sin x|$$

(g)	$P\,\sin(\log x)$

Seja: $u = \sin(\log x)$; $u' = \dfrac{1}{x}\cos(\log x)$

$v' = 1$; $v = x$

$$P\,\sin(\log x) = x\sin(\log x) - P\cos(\log x)$$

seja: $u = \cos(\log x)$; $u' = -\dfrac{1}{x}\sin(\log x)$

$v' = 1$; $v = x$

$$P\,\sin(\log x) = x\sin(\log x) - x\cos(\log x) - P\sin(\log x)$$

$$2\,P\,\sin(\log x) = x\sin(\log x) - x\cos(\log x)$$

$$P\,\sin(\log x) = \frac{x\sin(\log x) - x\cos(\log x)}{2}$$

(h) $P\,\dfrac{\log^2 x}{x^2}$

Seja: $u = \log^2 x$; $u' = \dfrac{2}{x}\log x$

$v' = x^{-2}$; $v = -\dfrac{1}{x}$

$$P\,\frac{\log^2 x}{x^2} = -\frac{\log^2 x}{x} + 2P\frac{\log x}{x^2}$$

Seja: $u = \log x$; $u' = \dfrac{1}{x}$

$v' = x^{-2}$; $v = -\dfrac{1}{x}$

$$P\,\frac{\log^2 x}{x^2} = -\frac{\log^2 x}{x} + 2\left[-\frac{\log x}{x} + P\,x^{-2}\right] = -\frac{\log^2 x}{x} - 2\frac{\log x}{x} - \frac{2}{x}$$

(i) $P\,\arcsin^2 x$

Seja: $u = \arcsin^2 x$; $u' = \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

$v' = 1$; $v = x$

$$P\,\arcsin^2 x = x\arcsin^2 x - 2P\,\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Seja: $u = \arcsin x$; $u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$v' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x(1-x^2)^{-1/2}$; $v = -\sqrt{1-x^2}$

$$P\,\arcsin^2 x = x\arcsin^2 x - 2\left[-\arcsin x\,\sqrt{1-x^2} + P\,1\right] = x\arcsin^2 x + 2\arcsin x\,\sqrt{1-x^2} - 2x$$