INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Análise Matemática I

Duração: 3h — **Época Especial (Bolonha)** — 25 de Setembro de 2006

Justifique convenientemente as respostas.

(3 v.) **1.** Diga se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n)}{n^2}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\text{arctg}\frac{1}{n})^n$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$.

(1 v.) **2.** Sabendo que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ ($a \in I\!R$) é convergente, de soma igual a 4, mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a^n$ também é convergente e indique a sua soma.

(2 v.) **3.** Considere a função $f(x) = (x^2+2x)e^{-x}$. Identifique eventuais extremos locais e assíntotas de f.

(2 v.) **4.** Sejam f uma função derivável e estritamente decrescente em $I\!R$ e $g(x) = f(\ln x^2)$.

a) Determine o domínio de g.

b) Resolva a inequação $g(x) > f(1)$.

c) Mostre que $g'(1) = 2f'(0)$.

(2.5 v.) **5.** Considere a função $f(x) = 5\ln(1+x)$.

a) Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$.

b) Com base na fórmula de Taylor, determine a equação de uma parábola que aproxime o gráfico $y = f(x)$ numa vizinhança de $x = 0$.

c) Indique um majorante para o erro cometido ao aproximar o valor de $f(x)$ no ponto $x = 0.1$ através da parábola obtida na alínea anterior.

(2 v.) **6.** Determine a função $F :]0, +\infty[\to I\!R$ que satisfaz as seguintes condições:

i) $F'(x) = x^5 \ln x,\ x > 0$ e **ii)** $F(1) = 0$.

(2.5 v.) **7.** Seja $f(x) = x|x-1|,\ \ x \in [-2, 2]$.

a) Indique um intervalo onde f satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle.

b) Determine a expressão analítica de $\displaystyle\int_{-2}^{x} f(t)\,dt,\ x \in [-2, 2]$.

(3.5 v.) **8.** **a)** Calcule o integral $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt[3]{y}}\,dy$ e interprete geometricamente o seu valor.

b) Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x}\ln^3 x\,dx$.

(1.5 v.) **9.** Defina os seguintes conceitos:

a) A função f é majorada no seu domínio.

b) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b$, pela definição de Cauchy.

Resolução:

1.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n)}{n^2}$ $\qquad \left|\frac{\sin(2n)}{n^2}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ |\sin x| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}}}{\leq} \frac{1}{n^2}$

Pelo 1º critério de comparação, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin(2n)}{n^2}\right|$ é convergente. Logo a série dada é absolutamente conv.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^n$

$\sqrt[n]{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^n} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$ Logo pelo critério de Cauchy a série é absolutamente convergente.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$ $\qquad \left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} = \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

Como $\sqrt{n} \leq n \ \forall n \in \mathbb{N}$, sai que $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{2n}$

$\displaystyle\sum \frac{1}{2n}$ é divergente pois é a série harmonica multiplicada por uma constante.

Pelo 1º critério de comparação a série $\displaystyle\sum \left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}\right|$ é divergente.

Contudo $\dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$ é o termo geral de uma sucessão decrescente e que tende para zero.

Pelo critério de Liebniz, a série dada é simplesmente convergente

2. A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ é uma série geométrica de razão a.

Esta série é convergente sse $|a|<1$. Logo também é convergente a série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-a)^n$ por ser uma série geométrica de razão $-a$ e, portanto, $|-a| = |a| < 1$.

Neste caso a soma da série é $\frac{1}{1-(-a)} = \frac{1}{1+a}$.

Sabemos que a série $\sum a^n$ tem soma 4 pelo que $\frac{1}{1-a} = 4 \Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Então $\frac{1}{1+a} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}$ //

3. $f(x) = (x^2+2x)e^{-x}$

f é contínua em todo o seu domínio: $\mathbb{R}$. Logo não existem assimptotas verticais.

<u>Assimptotas não verticais:</u>

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (x+2)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{e^x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{e^x} = -\infty$

Existe assimptota horizontal à direita.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x}{e^x} = 0$

Logo a recta de eq. $y=0$ (eixo dos xx) é assimptota de f em $+\infty$.

Estudo dos extremos:

$$f'(x) = (\cancel{2x}+2)e^{-x} - (x^2+\cancel{2x})e^{-x} = (2-x^2)e^{-x}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (2-x^2)e^{-x}=0 \Leftrightarrow 2-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Logo f tem dois extremos locais em $x=-\sqrt{2}$ e $x=\sqrt{2}$.

4.

(a) $D_g = \{x\in\mathbb{R} : x\neq 0 \text{ e } \ln x^2 \in D_f\} = \{x\in\mathbb{R} : x\neq 0\} =$
$= \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(b) $g(x) > f(1) \Leftrightarrow f(\ln x^2) > f(1) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ estrit. decrescente}}}{\Leftrightarrow} \ln x^2 < 1 \Leftrightarrow$

$\underset{\substack{\uparrow \\ e^x \text{ crescente}}}{\Leftrightarrow} e^{\ln x^2} < e^1 \Leftrightarrow x^2 < e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - e < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{e} < x < \sqrt{e}$

(c) g é a composição de duas funções deriváveis em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Logo, em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$g'(x) = f'(\ln x^2)\cdot(\ln x^2)' = f'(\ln x^2)\left(\frac{2x}{x^2}\right) =$$
$$= \frac{2}{x} f'(\ln x^2)$$

$$\therefore \quad g'(1) = \frac{2}{1} f'(\ln 1^2) = 2f'(0)$$

5.

(a) Eq. da tangente: $y = mx + b$

$m = f'(0)$ e b é tal que $(mx+b)_{x=0} = f(0) \Leftrightarrow b = f(0)$

$f'(x) = 5\,\dfrac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 5$

$b = f(0) = 5\ln(1) = 0 \quad \therefore \quad y = 5x$ é a eq. da tangente pedida

(b) Vamos determinar a fórmula de Taylor com resto de ordem 3, para obtermos um polinómio do 2º grau (parábola).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{2} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$$

com ξ entre 0 e x.

$$f'(x) = \frac{5}{1+x} \quad ; \quad f''(x) = \frac{-5}{(1+x)^2} \quad ; \quad f'''(x) = \frac{5\times 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{10}{(1+x)^3}$$

Então,

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f'(0) = 5 \quad ; \quad f''(0) = -5 \quad \text{e} \quad f'''(\xi) = \frac{10}{(1+\xi)^3}$$

Portanto,

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 =$$

$$= \underbrace{5x - \frac{5}{2}x^2}_{} + \frac{10}{(1+\xi)^3}x^3$$

Logo $y = 5x - \frac{5}{2}x^2$ é a equação da parábola pedida.

(c) No ponto $x=0.1$ temos um erro dado por:

$$\frac{10}{(1+\xi)^3}(0.1)^3 = \frac{0.01}{(1+\xi)^3}$$ que é função de $\xi \in [0, 0.1]$

Este erro decresce com ξ em $[0, 0.1]$, logo um majorante deste erro obtém-se com $\xi = 0$, isto é,

$$\frac{0.01}{(1+0)^3} = 0.01$$ //

6)

(i) $f'(x) = x^5 \ln x \quad , x > 0$

$F'(x) = x^5 \ln x \iff F(x) = P[x^5 \ln x] + c^{te}$

$P[x^5 \ln x] \underset{\substack{\uparrow \\ P.\ partes}}{=} \frac{x^6}{6} \ln x - P\left[\frac{x^6}{6} \cdot \frac{1}{x}\right] = \frac{x^6}{6} \ln x - P\left[\frac{x^5}{6}\right] =$

$= \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{x^6}{36} = \frac{x^6}{6}\left(\ln x - \frac{1}{6}\right)$

$\therefore \quad F(x) = \frac{x^6}{6}\left(\ln x - \frac{1}{6}\right) + c^{te}$

(ii) $F(1) = 0 \iff \frac{1}{6}\left(\ln 1 - \frac{1}{6}\right) + c^{te} = 0 \iff$

$\iff -\frac{1}{36} + c^{te} = 0 \iff c^{te} = \frac{1}{36}$

$\therefore \quad F(x) = \frac{x^6}{6}\left(\ln x - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{36}$

7.

(a) hip. teo. Rolle : $\begin{cases} f \text{ contínua em } [a,b] \\ f \text{ derivável em }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$

$f(1) = 0$ e $f(0) = 0$

logo $f(1) = f(0)$

Além disso, f é contínua em $[0,1]$ por ser o produto de duas funções contínuas neste intervalo. Em $]0,1[$, f é derivável pois é o produto de duas funções deriváveis neste intervalo.

Logo o intervalo $[0,1]$ satisfaz as condições de hipótese do teor. de Rolle.

b) $f(x)$ é definida por duas expressões diferentes consoante $x < 1$ ou $x > 1$.

Então, se $-2 \leq x \leq 1$, $f(x) = x(1-x)$ e, portanto,

$$\int_{-2}^{x} f(t)\,dt = \int_{-2}^{x} t(1-t)\,dt = \int_{-2}^{x} (t-t^2)\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{x} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2 - \frac{8}{3} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{14}{3} \quad (A)$$

Se $1 < x \leq 2$, $f(x) = x(x-1)$ e, portanto,

$$\int_{-2}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-2}^{1} f(t)\,dt}_{\text{retira-se de (A) com } x=1} + \int_{1}^{x} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{14}{3} + \int_{1}^{x} t(t-1)\,dt = \frac{3-2-28}{6} + \int_{1}^{x} (t^2-t)\,dt =$$

$$= -\frac{27}{6} + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_{1}^{x} = -\frac{27}{6} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) =$$

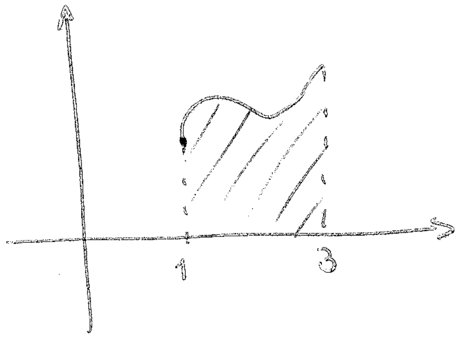
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{-2+3-27}{6} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{26}{6} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{13}{3}$$

Resumindo,

$$\int_{-2}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{14}{3}, & -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{13}{3}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

8.

(a) A função integranda é uma função positiva no intervalo de integração $[1,3]$. Logo, geometricamente o valor do integral corresponde à área da figura delimitada pelo gráfico de $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}$, pelo eixo das abcissas e pelas rectas verticais $x=1$ e $x=3$



Integração por substituição, tomando $x = \sqrt[3]{y} \therefore y = x^3$

temos $\cancel{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3} y^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} y^{-2/3}}$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Então,

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt[3]{y}}\, dy = \int_{\sqrt[3]{1}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{1}{1+x} \cdot 3x^2\, dx =$$

$$= \int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{3x^2}{1+x}\, dx = \int_1^{\sqrt[3]{3}} \left(3x - 3 + \frac{3}{1+x}\right) dx =$$

$$= \left[3\frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln(1+x)\right]_1^{\sqrt[3]{3}} =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{9}}{2} - 3\sqrt[3]{3} + 3\ln(1+\sqrt[3]{3}) - \frac{3}{2} + 3 - 3\ln(2)$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 & 1+x \\ \hline -3x^2-3x & 3x-3 \\ -3x & \\ 3x+3 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

(b) Pela definição,

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x} \ln^3 x\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{e^2}^{R} \frac{1}{x} \ln^3 x\,dx$$

Ora,

$$\int_{e^2}^{R} \frac{1}{x} \ln^3 x\,dx \underset{\frac{1}{x} = (\ln x)'}{=} \left[\frac{\ln^4 x}{4} \right]_{e^2}^{R} = \frac{\ln^4 R}{4} - \frac{(\ln e^2)^4}{4} =$$

$$= \frac{\ln^4 R}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{\ln^4 R}{4} - 4$$

Mas, $\lim_{R \to +\infty} \left(\frac{\ln^4 R}{4} - 4 \right) = +\infty$

Logo o integral é divergente.

9.

(a) f é majorada no seu domínio.

Sendo D o domínio de f:

$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M, \forall x \in D$

(b) $\lim_{x \to a} f(x) = b \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0 : |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$